KOMPLEKSNA ANALIZA

PAVLE PANDŽIĆ, 2. PREDAVANJE

Prisjetimo se:

Skup kompleksnih brojeva:

$$\mathbb{C} = \{z = x + yi \,\big|\, x, y \in \mathbb{R}\},$$

čini polje uz operacije

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Za $z = x + yi \in \mathbb{C}$ definiramo $\operatorname{Re} z = x$, Im $z = y$, $\bar{z} = x - yi$, te $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Argument $\arg z$ je realni broj iz $(-\pi, \pi]$ koji predstavlja veličinu kuta između pozitivnog dijela osi x i zrake iz ishodišta koja prolazi kroz z.

Koristeći modul i argument, z možemo izraziti u trigonometrijskom obliku:

$$z = |z|(\cos \arg z + i \sin \arg z) = |z|e^{i \arg z}.$$

Za interval vrijednosti argumenta može se uzeti i neki drugi interval duljine 2π, npr. $[0, 2\pi)$.

Skupove $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}^2$ identificiramo na uobičajeni način:

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pomoću te identifikacije prenosimo na $\mathbb{C}$ sve topološke pojmove koje znamo na $\mathbb{R}^2$, kao što su udaljenost, kugle (krugovi), otvoreni i zatvoreni skupovi, kompaktni i povezani skupovi, te konvergencija nizova i neprekidnost funkcija.

U ovom će nas kolegiju prvenstveno zanimati kompleksne funkcije kompleksne varijable, odnosno funkcije $f : \Omega \to \mathbb{C}$, gdje je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$. Često ćemo pretpostavljati da je Ω područje, odnosno otvoren i povezan skup.

Derivabilne (holomorfne) funkcije

Funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je derivabilna (holomorfna) na Ω ako za svaki $z_0 \in \Omega$ postoji

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{0.1}$$

U tom slučaju formula (0.1) definira funkciju f' na Ω koju nazivamo derivacijom funkcije f.

Svojstva derivacije

(i) Ako je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna onda je i neprekidna na Ω.

(ii) Ako su $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfne tada:

(1) Za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, funkcija $\lambda f + \mu g$ je holomorfna na Ω i $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

(2) fg je holomorfna na Ω i $(fg)' = f'g + fg'$.

(3) Ako $g(z) \neq 0$ za svaki $z \in \Omega$, onda je $\dfrac{f}{g}$ holomorfna na Ω i
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

(iii) Ako su $f : \Omega \to \mathbb{C}$ i $g : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ holomorfne, pri čemu je $f(\Omega) \subseteq \Omega_1$, onda je $g \circ f$ holomorfna na Ω i vrijedi
$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z), \qquad z \in \Omega.$$

Iz gornjega odmah slijedi da su polinomi holomorfne funkcije na $\mathbb{C}$ i da je derivacija dana uobičajenom formulom:
$$(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0)' = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_1.$$
Također, svaka je racionalna funkcija holomorfna na svojoj domeni.

Cauchy-Riemannovi uvjeti

Funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(z) + iv(z)$ identificiramo sa funkcijom $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.

Tada je $f(z)$ holomorfna ako i samo ako je $f(x, y)$ diferencijabilna i vrijede Cauchy-Riemannovi uvjeti
$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$
pri čemu je $f' = a + bi$.

Eksponencijalna funkcija

Kompleksna eksponencijalna funkcija $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je definirana sa
$$\exp(z) = e^z = \exp(x + iy) = e^x (\cos y + i \sin y).$$
Funkcija $\exp$ je diferencijabilna kao funkcija sa $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$ i vrijede Cauchy-Riemannovi uvjeti, pa je $\exp$ holomorfna na $\mathbb{C}$. Štoviše vrijedi $\exp'(z) = \exp(z)$.

Funkcija $\exp$ ima uobičajena svojstva eksponencijalne funkcije; posebno, $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

Restrikcija eksponencijalne funkcije na prugu $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ je homeomorfizam te pruge na $\mathbb{C}$ bez negativnog dijela x-osi.

Inverzna funkcija je logaritamska funkcija (preciznije, glavna grana logaritamske funkcije):
$$\ln : \mathbb{C} \setminus \langle -\infty, 0] \to \mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi \rangle, \quad \ln(z) = \ln|z| + i \arg z.$$

Funkcija $\ln$ je holomorfna na svojoj domeni, i derivacija joj je jednaka $\frac{1}{z}$. To se može dokazati koristeći Cauchy-Riemannov teorem, ali mi ćemo to vidjeti integriranjem funkcije $\frac{1}{z}$ po izvjesnim putevima.

Trigonometrijske i hiperbolne kompleksne funkcije

Neki daljnji primjeri holomorfnih funkcija su

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z};$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}.$$

Teorem. Neka je Ω područje i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija takva da je $f'(z) = 0$ za sve $z \in \Omega$. Tada je f konstantna funkcija.

Dokaz. Znamo da je za sve $z = x + yi = (x, y)$ iz Ω

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = v_y(x, y) - iu_y(x, y).$$

Dakle $f'(z) = 0$ povlači $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ na Ω.

Iz realne analize znamo da to povlači da je f konstanta na Ω. □

Ako Ω nije područje tada iz $f' = 0$ na Ω slijedi da je f konstantna na svakoj komponenti povezanosti od Ω.

Putevi u Ω

Sjetimo se da je **put u** Ω neprekidno preslikavanje $\gamma : [a, b] \to \Omega$.

Točke $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$ su **početak** i **kraj** puta γ. Put je **zatvoren** ako je $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Ako je zadana neka krivulja u kompleksnoj ravnini, onda svaki put čija se slika podudara sa zadanom krivuljom nazivamo **parametrizacijom** te krivulje.

Na primjer, gornja polukružnica sa središtem u ishodištu radijusa 1 parametrizirana je funkcijom

$$\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}.$$

Kružnica sa središtem u z_0 radijusa r parametrizirana je sa

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_0 + re^{it}.$$

Segment $[z_1, z_2]$ označavat će nam dužinu u $\mathbb{C}$ koja spaja z_1 i z_2. Jedna parametrizacija segmenta $[z_1, z_2]$ je

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1).$$

Put $\gamma = \alpha + i\beta$ je **gladak** (ili **klase** C^1) ako je funkcija γ derivabilna i derivacija γ' je neprekidna. Znamo da je to ekvivalentno s tim da su realne funkcije realne varijable α i β glatke.

Put $\gamma = \alpha + i\beta$ je **po dijelovima gladak** (ili **po dijelovima klase** C^1) ako je gladak osim u konačno mnogo točaka, to jest, ako postoje točke

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$$

tako da su restrikcije

$$\gamma|_{[t_k,t_{k+1}]}, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

glatke funkcije.

Integral funkcije po putu

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija, te $\gamma : [a,b] \to \Omega$ gladak put. **Integral funkcije** f **duž puta** γ definiramo kao kompleksni broj

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz \overset{def}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt =$$
$$\int_a^b \mathrm{Re}[f(\gamma(t))\gamma'(t)]dt + i\int_a^b \mathrm{Im}[f(\gamma(t))\gamma'(t)]dt.$$

Ako je γ po dijelovima gladak put, te $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ točke takve da su $\gamma|_{[t_k,t_{k+1}]}, k = 0, \ldots, n-1$, glatke funkcije, onda se **integral funkcije** f **duž puta** γ definira kao

$$\int_\gamma f \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Uočimo da, ako je $f = u + iv$ i $\gamma = \alpha + i\beta$, tada je

$$\begin{aligned} f(\gamma(t))\gamma'(t) &= (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t)))(\alpha'(t) + i\beta'(t)) \\ &= (u(\gamma(t))\alpha'(t) - v(\gamma(t))\beta'(t)) \\ &\quad + i(u(\gamma(t))\beta'(t) + v(\gamma(t))\alpha'(t))). \end{aligned}$$

Slijedi da je

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt &= \int_a^b (u(\gamma(t))\alpha'(t) - v(\gamma(t))\beta'(t))dt \\ &+ i\int_a^b (u(\gamma(t))\beta'(t) + v(\gamma(t))\alpha'(t)))dt. \end{aligned}$$

Napomena. Funkciji f možemo pridružiti vektorsko polje $F = (u, -v)$. Tada je realni dio integrala f po γ jednak integralu polja F duž γ, dok je imaginarni dio jednak toku polja F kroz γ.

Ako pretpostavimo da je F klase C^1, i da je (slika od) γ jednostavno zatvorena krivulja čije je unutarnje područje D "dovoljno dobar skup" sadržan u Ω, tada bismo mogli iskoristiti Greenov i Gaussov teorem.

Greenov teorem bi nam dao da je integral F duž γ jednak integralu $-v_x - u_y$ po D, ali ako je f holomorfna, onda je $-v_x - u_y = 0$ zbog Cauchy-Riemannovih uvjeta.

Slično, Gaussov teorem bi nam dao da je tok F kroz γ jednak integralu $u_x - v_y$ po D, a ako je f holomorfna, onda je $u_x - v_y = 0$ zbog Cauchy-Riemannovih uvjeta.

Tako bismo mogli zaključiti da je integral holomorfne funkcije po γ kao gore jednak 0.

U kompleksnoj se analizi analogna tvrdnja zove Cauchyjev teorem, i dokazuje se jednostavnije, uz slabije pretpostavke, kao što ćemo vidjeti u sljedećih nekoliko predavanja.

Primjer: Integral funkcije po segmentu

Ako su $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tada je segment $[z_1, z_2]$ parametriziran sa

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1).$$

Očito je $\gamma'(t) = z_2 - z_1$, pa je

$$\int_{[z_1,z_2]} f \stackrel{def}{=} \int_\gamma f = (z_2 - z_1)\int_0^1 f(z_1 + t(z_2 - z_1))dt.$$

Suprotan put

Za put $\gamma : [a,b] \to \Omega$ definiramo suprotan put γ^-, sa

$$\gamma^- : [a,b] \to \Omega, \quad \gamma^-(t) = \gamma(a + b - t).$$

Ako je put γ po dijelovima gladak, onda je i put γ^- po dijelovima gladak.

Uočite da je $\gamma([a,b]) = \gamma^-([a,b])$, a početak i kraj puta γ su upravo kraj i početak od γ^-.

Zadatak: dokažite da je za svaku neprekidnu funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$

$$\int_{\gamma^-} f = -\int_\gamma f.$$

(To slijedi iz Teorema o zamjeni varijable za obični Riemannov integral.)

Suma puteva

Suma puteva $\gamma : [a,b] \to \Omega$ i $\delta : [c,d] \to \Omega$ takvih da je $\gamma(b) = \delta(c)$ definira se kao put $\eta : [a, d - c + b] \to \Omega$,

$$\eta(t) = \begin{cases} \gamma(t), & a \le t \le b; \\ \delta(t + c - b), & b \le t \le d - c + b. \end{cases}$$

Ako su γ i δ po dijelovima glatki putovi, onda je i η po dijelovima gladak put.

Zadatak: dokažite da je za svaku neprekidnu funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$

$$\int_\eta f = \int_\gamma f + \int_\delta f.$$

(To slijedi iz aditivnosti po području običnog Riemannovog integrala.)

Lema (Fundamentalna ocjena integrala). Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcije i $\gamma : [a,b] \to \Omega$ po dijelovima gladak put.

Tada je

$$\left|\int_\gamma f\right| \leq M \cdot \ell(\gamma),$$

pri čemu je $\ell(\gamma)$ duljina puta γ, definirana sa

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt,$$

dok je

$$M = \max_{z\in\gamma([a,b])} |f(z)|.$$

(Maksimum postoji jer je $\gamma([a,b])$ kompaktan skup kao neprekidna slika segmenta, a funkcija $z \mapsto |f(z)|$ je neprekidna realna funkcija.)

Dokaz. Uvedimo oznaku $I := \int_\gamma f$.

Ako je $I = 0$ onda nemamo što dokazivati. Zato pretpostavimo da je $I \neq 0$.

Kompleksni broj I zapišimo u trigonometrijskom obliku

$$I = |I|e^{i\varphi}, \qquad \text{gdje je } \varphi = \arg I.$$

Tada je

$$\begin{aligned}|I| = e^{-i\varphi} I = e^{-i\varphi}\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt &= \int_a^b e^{-i\varphi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\varphi} f(\gamma(t))\gamma'(t))dt + i\int_a^b \operatorname{Im}(e^{-i\varphi} f(\gamma(t))\gamma'(t))dt.\end{aligned}$$

Kako je $|I| \in \mathbb{R}$, dobivamo $\int_a^b \operatorname{Im}(e^{-i\varphi} f(\gamma(t))\gamma'(t))dt = 0$ i

$$|I| = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\varphi} f(\gamma(t))\gamma'(t))dt.$$

Sada, jer je $\operatorname{Re} z \leq |z|$ za sve $z \in \mathbb{C}$, slijedi

$$\begin{aligned}|I| \leq \int_a^b \left|e^{-i\varphi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\right| dt = \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\, dt \\ \leq M\int_a^b |\gamma'(t)|dt = M\ell(\gamma).\end{aligned}$$

□

Primjer

Izračunajmo $\int_{\gamma_1} |z|dz$ i $\int_{\gamma_2} |z|dz$, ako su γ_1 i γ_2 dva puta s početkom u $-i$ te krajem u i zadana s

$$\gamma_1(t) = it, \quad t \in [-1, 1];$$
$$\gamma_2(t) = e^{it}, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Prema definiciji integrala je

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} |z|dz &= \int_{-1}^{1} |\gamma_1(t)|\gamma_1'(t)dt = \int_{-1}^{1} |t|idt = i,\\ \int_{\gamma_2} |z|dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\gamma_2(t)|\gamma_2'(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ie^{it}dt = 2i.\end{aligned}$$

Primitivna funkcija

Primijetimo da smo u prethodnom primjeru dobili različite vrijednosti pri računanju integrala iste funkcije po γ_1 i γ_2, iako su to putevi s istim početkom i krajem. Situacija će biti drukčija ako funkcija koju integriramo ima primitivnu funkciju.

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija. Funkciju $F : \Omega \to \mathbb{C}$ koja zadovoljava

$$F'(z) = f(z), \quad \forall z \in \Omega$$

nazivamo **primitivnom funkcijom od f na** Ω.

Propozicija. Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija koja ima primitivnu funkciju F na Ω. Tada za svaki po dijelovima gladak put $\gamma : [a, b] \to \Omega$ vrijedi

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Dokaz. Ako je put γ gladak, onda je

$$\begin{aligned}\int_\gamma f &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt\\ &= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)dt = (F \circ \gamma)(t)|_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).\end{aligned}$$

Ako je γ samo po dijelovima gladak, onda gornje primijenimo na glatke dijelove od γ i zbrojimo rezultate.

Preciznije, neka su $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ takvi da je $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ gladak za svaki i. Tada koristeći već dokazanu formulu za glatki put imamo

$$\begin{aligned}\int_\gamma f &= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\\ &= \sum_{i=1}^{n} (F(\gamma(t_i)) - F(\gamma(t_{i-1})))\\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \qquad \square\end{aligned}$$

Argumentaciju kao u zadnjem dijelu ovog dokaza ubuduće ćemo često preskakati; razne tvrdnje za po dijelovima glatke puteve dokazivat ćemo kao da su putevi glatki i podrazumijevati da se na kraju rezultati za glatke dijelove sumiraju.

Neovisnost o putu integracije

Iz gornje propozicije vidimo da ako f ima primitivnu funkciju na Ω te ako su γ_1 i γ_2 dva puta u Ω s istim početkom z_1 i krajem z_2, tada je

$$\int_{\gamma_1} f = F(z_2) - F(z_1) = \int_{\gamma_2} f.$$

Drugim riječima, integral funkcije f ne ovisi o putu po kojem integriramo, tako dugo dok taj put spaja fiksirane točke z_1 i z_2.

Situacija je drukčija ukoliko f nema primitivnu funkciju, što nam potvrđuje i gornji primjer.

Ako je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ takva da je

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

za svaka dva po dijelovima glatka puta γ_1, γ_2 u Ω koji imaju isti početak i kraj, onda kažemo da je integral od f **neovisan o putu integracije**.

Neovisnost integrala funkcije o putu integracije može se izreći i kao: $\int_\gamma f = 0$ za svaki po dijelovima gladak zatvoreni put u Ω.

Naime, pretpostavimo da je integral of f neovisan o putu integracije, i neka je $\gamma : [a, b] \to \Omega$ zatvoren po dijelovima gladak put. Označimo $\gamma(a) = \gamma(b)$ sa z_0.

Tada je integral of f po γ jednak integralu po konstantnom putu $c : [a, b] \to \Omega$, $c(t) = z_0$, jer c ima isti početak i kraj kao γ. S druge strane, integral f po c je 0, jer je $c' = 0$.

Obratno, pretpostavimo da je $\int_\gamma f = 0$ za svaki po dijelovima gladak zatvoren put u Ω. Neka su $z_1, z_2 \in \Omega$ i neka su α i β putevi u Ω s početkom u z_1 i krajem u z_2.

Tada je suma puteva α i β^-, koju označimo s γ, zatvoren po dijelovima gladak put u Ω, pa je integral od f po γ jednak 0. Slijedi da je

$$0 = \int_\gamma f = \int_\alpha f + \int_{\beta^-} f = \int_\alpha f - \int_\beta f,$$

pa je $\int_\alpha f = \int_\beta f$.

Cauchyjev teorem za derivaciju. Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. Tada su sljedeće dvije tvrdnje ekvivalentne:

(1) Integral od f ne ovisi o putu integracije, ili ekvivalentno, $\int_\gamma f = 0$ za svaki po dijelovima gladak zatvoren put γ u Ω;

(2) f ima primitivnu funkciju na Ω.

Dokaz. $\boxed{\Leftarrow}$ Ova je implikacija već dokazana (prethodna propozicija).

$\boxed{\Rightarrow}$ Pretpostavimo da je Ω povezan (inače promatramo pojedine komponente povezanosti). Odaberimo neki $z_0 \in \Omega$.

Za $z \in \Omega$ neka je γ_z neki po dijelovima gladak put u Ω od z_0 do z. (Takav uvijek postoji; neprekidan put može se zamijeniti po dijelovima glatkim, pa čak i putem koji je sastavljen od konačnog broja segmenata.)

Definiramo
$$F : \Omega \to \mathbb{C}, \quad F(z) = \int_{\gamma_z} f.$$

Uočimo najprije da, zbog toga što pretpostavljamo da vrijedi 1. iz iskaza teorema, vrijednost $F(z)$ ne ovisi o odabiru puta γ_z (koji počinje u z_0 i završava u z).

Pokazažimo da je $F'(z) = f(z)$ za sve $z \in \Omega$.

Zbog otvorenosti skupa Ω slijedi da za svaki $z \in \Omega$ postoji $r > 0$ takav da je $K(z,r) \subseteq \Omega$. Tada za sve $h \in \mathbb{C}, |h| < r$ vrijedi $z + h \in K(z,r)$.

Ako je γ_z put od z_0 do z, tada ćemo za γ_{z+h} uzeti sumu puta γ_z i segmenta $[z, z+h]$.

Sada zaključujemo
$$\begin{aligned}
F'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_{\gamma_{z+h}} f - \int_{\gamma_z} f \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th)(z+th)' dt \\
&= \lim_{h\to 0} \int_0^1 f(z+th) dt = (\ f \text{ je neprekidna }) \\
&= \int_0^1 \lim_{h\to 0} f(z+th) dt = \int_0^1 f(z) dt = f(z) \int_0^1 dt = f(z).
\end{aligned}$$

□

Primjer

Neka je $r > 0$ i $\gamma(t) = re^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Za $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi
$$\int_\gamma z^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1; \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

Zaista, ako je $n \neq -1$ tada je $z \mapsto \frac{z^{n+1}}{n+1}$ primitivna funkcija od $z \mapsto z^n$ na $\mathbb{C}$. Prema prethodnom teoremu, integral ove funkcije po svakom zatvorenom putu iznosi 0.

Za $n = -1$ gornji integral računamo po definiciji:
$$\int_\gamma z^{-1} dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^{-1} rie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Zaključujemo da funkcija $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$, nema primitivnu funkciju (na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$).

S druge strane, vidjet ćemo da ista funkcija ima primitivnu funkciju na $\mathbb{C}$ bez zrake $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 0\}$ - ta je primitivna funkcija logaritamska funkcija $\ln$.

Integracija po rubu trokuta

Trokut u $\mathbb{C}$ je konveksna ljuska tri točke $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Pišemo $\Delta =< z_0, z_1, z_2 >$.

Rub trokuta Δ sastoji se iz tri segmenta i zato je

$$\int_{\partial\Delta} f = \int_{[z_0,z_1]} f + \int_{[z_1,z_2]} f + \int_{[z_2,z_0]} f.$$

Već smo vidjeli kako računamo integral po segmentu, npr.

$$\begin{aligned} \int_{[z_0,z_1]} f &= \int_0^1 f(z_0 + t(z_1 - z_0))(z_0 + t(z_1 - z_0))' dt \\ &= (z_1 - z_0) \int_0^1 f(z_0 + t(z_1 - z_0)) dt. \end{aligned}$$

Goursat-Pringsheimov teorem. Ako je f holomorfna funkcija na Ω, tada je

$$\int_{\partial\Delta} f = 0, \quad \forall \Delta \subseteq \Omega.$$

(Uočimo da je pretpostavka da je čitav trokut Δ sadržan u Ω, ne samo njegov rub $\partial\Delta$.)

Dokaz. Induktivno ćemo konstruirati niz trokuta

$$\Delta = \Delta_0 \supseteq \ldots \supseteq \Delta_n \supseteq \Delta_{n+1} \supseteq \ldots$$

sa svojstvima:

(a) $\left| \int_{\partial\Delta_n} f \right| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_{n+1}} f \right|$;

(b) opseg od Δ_n je dvostruko veći od opsega od Δ_{n+1}.

Prvi trokut Δ_0 već imamo. Ako pretpostavimo da smo konstruirali Δ_n, pokažimo kako definirati Δ_{n+1}.

Trokut Δ_n razdijelimo njegovim srednjicama na trokute $\Delta_n^{(1)}$, $\Delta_n^{(2)}$, $\Delta_n^{(3)}$, $\Delta_n^{(4)}$.

Sada definiramo Δ_{n+1} kao onaj među trokutima $\Delta_n^{(1)}, \Delta_n^{(2)}, \Delta_n^{(3)}, \Delta_n^{(4)}$ koji ima svojstvo da je

$$\left| \int_{\partial\Delta_{n+1}} f \right| \geq \left| \int_{\partial\Delta_n^{(i)}} f \right|, \quad i = 1, \ldots, 4.$$

Tada je

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f \right| = \left| \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial\Delta_n^{(i)}} f \right| \leq \sum_{i=1}^{4} \left| \int_{\partial\Delta_n^{(i)}} f \right| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_{n+1}} f \right|,$$

pa je (a) ispunjeno.

Za svaki $i = 1, \ldots, 4$ su stranice trokuta $\Delta_n^{(i)}$ dvostruko manje od odgovarajućih stranica trokuta Δ_n, pa je ispunjeno i (b).

Sada imamo niz zatvorenih padajućih (s obzirom na inkluziju) skupova čiji dijametar teži u 0, pa po Cantorovom teoremu o presjeku slijedi da postoji $w \in \Omega$ tako da je

$$\bigcap_{n\geq 0} \Delta_n = \{w\}.$$

Funkcija f je derivabilna u w, što po definiciji znači da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $K(w,\delta) \subseteq \Omega$ i

$$(z \in K(w,\delta), z \neq w) \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(w) \right| < \varepsilon. \tag{0.2}$$

Uz oznaku $r(z) := f(z) - f(w) - f'(w)(z - w)$, (0.2) daje

$$|r(z)| \leq \varepsilon |z - w|, \quad \forall z \in K(w,\delta). \tag{0.3}$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\int_{\partial\Delta_n} r(z)dz = \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz - \int_{\partial\Delta_n} (f(w) + f'(w)(z-w))dz.$$

Prema Cauchyjevom teoremu za derivaciju, za svaki po dijelovima gladak zatvoren put γ u Ω, pa posebno i za $\partial\Delta_n$ vrijedi

$$\int_{\partial\Delta_n} (f(w) + f'(w)(z-w))dz = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

(jer podintegralna funkcija ima primitivnu funkciju).

Prema tome, imamo

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_n} r(z)dz, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{0.4}$$

Odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\Delta_n \subseteq K(w,\delta)$ za sve $n \geq n_0$.

Neka je O opseg trokuta Δ i O_n opseg trokuta Δ_n za $n \in \mathbb{N}$.

Uočimo da vrijedi

$$|z - w| \leq O_n, \quad z \in \partial\Delta_n, \tag{0.5}$$

pa iz (0.3) imamo

$$\max_{z\in\partial\Delta_n} |r(z)| \leq \varepsilon O_n \overset{(b)}{=} \frac{\varepsilon}{2^n} O.$$

Prema fundamentalnoj ocjeni integrala slijedi

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} r \right| \leq \max_{z\in\partial\Delta_n} |r(z)| \cdot O_n \leq (\frac{\varepsilon}{2^n} \cdot O)(\frac{1}{2^n} \cdot O) = \frac{\varepsilon}{4^n} \cdot O^2. \tag{0.6}$$

Konačno, imamo

$$\left| \int_{\partial\Delta} f \right| \overset{(a)}{\leq} 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f \right| \overset{(0.4)}{=} 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} r \right| \overset{(0.6)}{\leq} \varepsilon \cdot O^2.$$

Zbog proizvoljnosti od ε slijedi $\left| \int_{\partial\Delta} f \right| = 0$, odnosno $\int_{\partial\Delta} f = 0$. $\square$